## 原子核物理用語・キーワード解説

### 南部-Goldstoneの定理 (Nambu-Goldstone theorem)

日高 義将 (理研・仁科センター)

対称性とその自発的破れは，現代物理における重要な基本的概念のひとつです．南部-Goldstoneの定理は，連続対称性が自発的に破れた場合に波数がゼロの極限で振動数がゼロになる南部-Goldstone (NG) モードが現れることを主張します [1]．NG モードの例としては，ハドロン物理におけるパイ中間子 (カイラル対称性の破れ)[1]，強磁性体中のスピン波 (スピン回転対称性の破れ)，格子結晶中のフォノン (並進対称性の破れ) などがあります．

理論に連続対称性が存在すると Noether の定理よりその対称性に付随した保存電荷が存在します．保存電荷には，時空の並進演算子と可換な保存電荷とそうでない電荷があり，前者は内部対称性または並進対称性に付随した保存電荷で，後者は時空対称性に付随した電荷です．ここでは，時空の並進演算子と可換な保存電荷に対応した対称性の破れに伴う NG モードについて解説します．また，簡単のため回転対称性があり並進対称性の破れもない場合を考えます．一般に 2 種類の NG モード (Type-A, Type-B) が存在します．Type-A モードは，典型的に振動数が波数の比例し，Type-B モードは，2 乗に比例します[2]．Lorentz 対称性が明白な系では，パイ中間子のように Type-A NG モードが現れますが，一般にはスピン波や K 中間子が凝縮した Color-Flavor Locked 相に現れる NG モード [3] のように Type-B になる場合もあります．これらの NG モードの発現機構を見て行きましょう．

対称性の自発的破れはハミルトニアンと可換なある保存電荷 $Q$ に対して $\langle[Q,\phi(x)]\rangle \equiv \mathrm{tr}\,\rho[Q,\phi(x)] \neq 0$ となる局所場 $\phi$ が存在することで定義されます．ここで，$\rho$ は密度演算子で，真空 $|\Omega\rangle$ の場合は $\rho = |\Omega\rangle\langle\Omega|$ の純粋状態，有限温度や有限密度系の場合には Gibbs 分布に取ります．対称性の自発的破れを起こす簡単な例として $SU(2)\times U(1)$ 対称性を持つ 2 成分複素スカラー場 $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$ の模型を tree level で解析してみましょう．$\boldsymbol{\varphi}$ の正準共役変数を $\boldsymbol{\pi}^\dagger$ とします．また，ハミルトニアン密度を $\mathcal{H} = |\boldsymbol{\pi}|^2 + |\nabla\boldsymbol{\varphi}|^2 - m^2|\boldsymbol{\varphi}|^2 + \lambda|\boldsymbol{\varphi}|^4/2$ とします．ハミルトニアンは $SU(2)\times U(1)$ 変換のもとで不変でその保存電荷は電荷密度を $n_a \equiv i\boldsymbol{\pi}^\dagger T_a\boldsymbol{\varphi} - i\boldsymbol{\varphi}^\dagger T_a\boldsymbol{\pi}$ として，$Q_a = \int d^3x n_a(x)$ で表されます．$T_0 = 1/2$ は $U(1)$ 対称性の生成子，$T_a (a = 1,2,3)$ は $SU(2)$ 対称性の生成子で $\sigma_a$ を Pauli 行列として $T_a = \sigma_a/2$ に選びます．ハミルトニアンは $m^2 < 0$ ならば下に凸で $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{0}$ で最小値を取りますが，$m^2 > 0$ ならば，ワインボトルの底のようになり，最小値は $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{0}$, $|\boldsymbol{\varphi}|^2 = m^2/\lambda$ になります．$|\boldsymbol{\varphi}|^2$ が一定となる配位に対してハミルトニアンは等しい値を取ります．異なる $\boldsymbol{\varphi}$ を持つ状態は異なる基底状態に対応します．ここでは，期待値を $\langle\boldsymbol{\varphi}\rangle = (0, \sqrt{m^2/\lambda}) \equiv (0, v/\sqrt{2})$ に選びましょう．破れた対称性の電荷は $Q_\pm = Q_1 \pm iQ_2$ 及び $Q' = Q_0 - Q_3$ で，$\boldsymbol{\varphi} = (\chi, (\psi + i\eta + v)/\sqrt{2})$ とパラメトライズすると $\langle[Q_+, \chi]\rangle = -\langle[Q_-, \chi^\dagger]\rangle = \langle[Q', i\eta/\sqrt{2}]\rangle = v/\sqrt{2}$ となります．それ以外の

---

[1]パイ中間子は近似的なカイラル対称性の破れに伴う NG モードと理解され，クォークの質量による陽な破れによって小さな質量を持ちます．

[2]正確には，Type-A,B は交換関係の期待値を用いて定義され，分散関係を用いた分類 [2] とは区別されますが，これらは典型的な場合には一致するので本稿ではあまり区別せず用います．

電荷と場の交換関係の期待値はゼロになります．破れていない電荷は $Q = Q_0 + Q_3$ で，対称性は $SU(2)\times U(1)$ から $U_Q(1)$ に自発的に破れた事がわかります．この時，ハミルトニアン密度の２次の項は，$\mathcal{H}_{2\,次} = |\boldsymbol{\pi}|^2 + |\nabla\chi|^2 + (\nabla\eta)^2/2 + (\nabla\psi)^2/2 + \lambda v^2\psi^2/2$ となります．従って，破れた対称性の方向に場を滑らかに変化させるとハミルトニアンは $|\nabla\chi|^2$ 及び $(\nabla\eta)^2/2$ に比例して増加します．これらの自由度 $\chi, \chi^\dagger, \eta$ を弾性変数と呼びます．また，破れた保存電荷密度は $\boldsymbol{\pi} = (\pi_\chi, (\pi_\psi + i\pi_\eta)/\sqrt{2})$ とパラメトライズして，$n_+ = iv\pi_\chi^\dagger/\sqrt{2} + \cdots$, $n_- = -iv\pi_\chi/\sqrt{2} + \cdots$ 及び $n' = v\pi_\eta + \cdots$ となり，場の非線形項を無視すると，弾性変数と保存電荷密度は正準共役の関係になっていることがわかります [4]．運動方程式は波動方程式となり，線形の分散関係を持った Type-A NG モードが形成されます．NG モードは弾性変数と保存電荷が正準ペアを組み伝播するモードとみなせます．

ここでは簡単な模型を使って NG モードの発現機構を見て来ました．有限温度有限密度系に拡張するにはハミルトニアンを自由エネルギーに置き換えれば同様の議論が成り立ちます．一般に，対称性が自発的に破れた時に現れる弾性変数の数は破れた対称性の保存電荷の数に一致します．しかしながら，弾性変数と保存電荷密度が作る NG モードの数は弾性変数の数に必ずしも一致しません．例えば，強磁性体の場合はスピンが揃った方向に垂直な方向が２つあり，それらに対応した弾性変数が２つ存在します．しかし強磁性体の NG モードであるスピン波は１つしか現れません．この不一致は $SU(2)\times U(1)$ 模型でも化学ポテンシャル $\mu$ を導入することで見ることができます．この場合，$H - \mu Q_0$ を最小化します．その最小値は，$\langle\boldsymbol{\pi}\rangle = (0, i\mu v/(2\sqrt{2}))$ 及び $\langle\phi\rangle = (0, v/\sqrt{2})$，$v^2 = 2(m^2 + \mu^2/4)/\lambda$ で与えられます．化学ポテンシャルを導入したことで NG モードが凝縮を起こし，その結果 $\langle n'\rangle \equiv \mu v^2/2$ が期待値を持ちます．対称性の自発的破れのパターンは $SU(2)\times U(1) \to U_Q(1)$ で先ほどと同じですが，$n'$ が期待値を持つことで $\langle[Q_-, n_+]\rangle = -\langle[Q_+, n_-]\rangle = \mu v^2/2 \neq 0$ となります．これは $n_1$ と $n_2$ は保存電荷密度でありながら弾性変数でもあることを意味し，また，これらは正準変数の意味で独立でありません．従って $\mu = 0$ のときは独立の NG モードを形成していた $n_1$ と $n_2$ はもはや独立でなく同一のモードを形成します．分散関係を求めると，$n'$ と $\eta$ が作る Type-A NG モードに加え，振動数が波数の２乗に比例した Type-B モードが現れます [3]．一般には Type-B の NG モードの数は，保存電荷密度かつ弾性変数の正準ペアの数 $\mathrm{rank}\langle[Q_a, n_b(x)]\rangle/2$ に等しくなります．ここで rank は $\langle[Q_a, n_b(x)]\rangle$ を $a$,$b$ の足を持つ行列と見なした時の階数を表します．残りの NG モードは Type-A のままでその数は，破れた対称性の電荷の数を $N_{\mathrm{BS}}$ として $N_{\mathrm{BS}} - \mathrm{rank}\langle[Q_a, n_b(x)]\rangle$ となります．結果として NG モードの数は $N_{\mathrm{BS}} - \mathrm{rank}\langle[Q_a, n_b(x)]\rangle/2$ に等しくなります [5,6]．

ここでは対称性の自発的破れに伴う NG モードの数と分散に注目しました．詳しく触れませんでしたが対称性の自発的破れは分散関係だけでなく相互作用にも強い制限を与え，Goldberger-Treiman 関係式など様々な有用な低エネルギー定理を導きハドロン物理の発展に重要な役割を担って来ました．


[1] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961); J. Goldstone, Nuovo Cim. **19**, 154 (1961); J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, 965 (1962).

[2] H. B. Nielsen and S. Chadha, Nucl. Phys. B **105**, 445 (1976).

[3] V. A. Miransky and I. A. Shovkovy, Phys. Rev. Lett. **88**, 111601 (2002); T. Schafer, D. T. Son, M. A. Stephanov, D. Toublan, and J. J. M. Verbaarschot, Phys. Lett. **B522**, 67 (2001).

[4] Y. Nambu, J. Statist. Phys. **115**, 7 (2004).

[5] H. Watanabe and H. Murayama, Phys. Rev. Lett. **108**, 251602 (2012).

[6] Y. Hidaka, Phys. Rev. Lett. **110**, 091601 (2013).