共鳴状態と閾値カスプ（Resonances and threshold cusps）

兵藤 哲雄（京都大学基礎物理学研究所）

共鳴は物理学の様々な領域であらわれる普遍的な現象で [1]、原子核ハドロン物理でも多くの共鳴状態の存在が知られています。一方で、核力の $^1S_0$ チャンネルのように引力的で大きな s 波散乱長を持つ系では virtual 状態と呼ばれる状態が存在し、例えば ^{9}Be の $J^P = 1/2^+$ 状態は virtual 状態と関連して議論されています。さらに、近年のハドロン分光実験での XYZ 粒子やペンタクォーク P_c などの新粒子の発見と関連し、スペクトルのピークの解釈として閾値カスプ効果という言葉も出てきます。本稿ではまず共鳴状態と virtual 状態が散乱振幅の極として定義されることを説明し、閾値カスプ構造は極の存在とは無関係であることを示します。

共鳴状態を同定する際に、通常「スペクトルのピークエネルギー」「散乱位相差が $\pi/2$ を通過するエネルギー」などの観測量が使われますが、この場合、バックグラウンド振幅の効果などで、特に幅の広い状態に対して定義が曖昧になります。一方で、共鳴状態は複素エネルギー平面上の散乱振幅の極としても定義できます。散乱振幅の極は解析接続により（原理的には）一意的に決まるので曖昧さのない共鳴状態の定義ができ、束縛状態との類似性も明確になります。

簡単のため、チャンネル結合のない非相対論的な 2 体散乱を考えます（教科書 [2] 参照、相対論的な場合は教科書 [3] など）。部分波 l の散乱振幅 $f_l(p)$ は運動量 p が実数で正の物理的領域で定義されていますが、長距離力を含まないポテンシャル散乱問題では、原点を含むある領域で $f_l(p)$ は p の有理型関数（極以外の特異点を含まない関数）となるので、複素 p 平面に散乱振幅を解析接続することができます。束縛状態（bound state）は負のエネルギーを持つハミルトニアンの離散的固有状態ですが、解析接続された散乱振幅では $p = i|p|$ の極として表現されます。散乱振幅の極は Jost 関数の零点なので、Schrödinger 方程式を内向きの波が遠方で消える境界条件で解くことに対応します。

エネルギー $E = p^2/(2\mu)$ は運動量の二価関数なので、p の偏角が 0 から 2π まで変化する間に E の偏角は 4π まで変化します（図 1）。よって複素エネルギー平面での散乱振幅は Im $p > 0$ に対応する第 1 リーマン面と Im $p < 0$ に対応する第 2 リーマン面の上で定義されます。物理的な散乱がおこる実軸上の $E > 0$ の領域では散乱振幅が虚部を持ち不連続で、$E = 0$ が分岐点となります。束縛状態の極は、複素エネルギー平面の第 1 リーマン面に存在しています。

共鳴状態（resonance）は第 2 リーマン面の第 4 象限の複素エネルギーの極（p 平面で $7\pi/4 < \arg p < 2\pi$ の極）で表現されます。極が $E = z_R$ にあると、共鳴エネルギーの近くでは散乱振幅が $f_l(E) \propto 1/(E - z_R)$ と Breit-Wigner 型の振る舞いを示すので、極の実部が共鳴エネルギー、

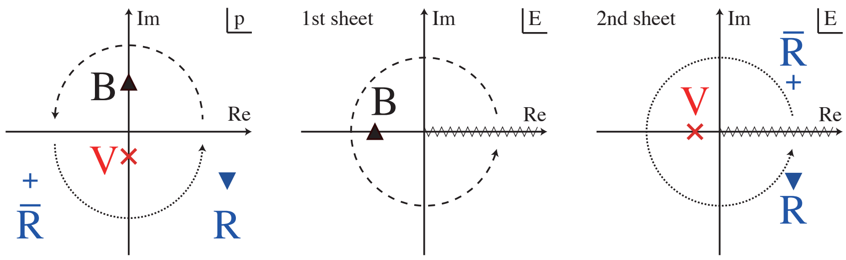

図 1: 複素運動量 p 平面（左）および複素エネルギー E 平面（中：第１リーマン面、右：第２リーマン面）での束縛状態（B)、virtual 状態 (V)、共鳴状態（R)、反共鳴状態（R̄）の極の模式図。

虚部が崩壊幅の半分に対応します。共鳴状態を複素固有値をもつハミルトニアンの固有状態として定式化するには非エルミート量子力学 [3] が必要になりますが、散乱振幅の極としての定義では束縛状態と同じ条件式で理解できます。また、実軸上の $E<0$ の領域で $f_l(E)$ が実であることから、反転定理 $f_l(E^*)=[f_l(E)]^*$ により $E=z_R$ に極があれば必ず $E=z_R^*$ にも極があります。$E=z_R^*$ の極は反共鳴状態（anti-resonance）と呼ばれ、時間反転対称性により共鳴状態は反共鳴状態と対になってあらわれます。共鳴状態の物理的な起源は主に２種類あり、１チャンネル問題でポテンシャルの引力に起因して生成されるポテンシャル共鳴と、他のチャンネルの束縛状態が崩壊チャンネルに結合して起こる Feshbach 共鳴に分類されます [3]。

virtual 状態（virtual state）は第２リーマン面の実部が負の領域の極で表現されます。Jost 関数の性質から、空間３次元では s 波散乱のみに virtual 状態があらわれます [2]。直接観測できる状態ではありませんが、s 波の閾値近傍に virtual 状態の極があると散乱長が引力的で大きくなり、閾値より上のスペクトルも影響を受けます。物理的には相互作用が引力的だが束縛状態を作るほど十分に強くない場合に、散乱振幅は virtual 状態の極を持ちます。

閾値カスプ（threshold cusp）は、散乱チャンネルの閾値の分岐点に起因する運動学的な効果です。閾値 $E_{\rm th}$ より高いエネルギーでは散乱振幅の虚部が $(E-E_{\rm th})^{l+1/2}$ と振舞うので、$l+1$ 階微分が発散し $f_l(E)$ は非解析的な構造を示します。これが閾値のカスプ構造で、物理的には中間状態の閾値が開くことに起源があります。三角ダイアグラムなどに起因する、より複雑な特異性も、本質的には運動学的に中間状態の on-shell 条件で決まっています [2]（余談ですが、南部さんはこの分野でも先駆的な仕事をしています [4]）。

このように、相互作用や固有状態など系の動力学を反映しているのは共鳴/virtual 状態の極であり、運動学的な起源を持つ閾値カスプの存在とは独立な問題です。virtual 状態の極が閾値の近くにあるとカスプ効果が強められるため、カスプと virtual 状態が混同されやすいのですが、あくまで系の情報を反映しているのは virtual 状態です。カスプ効果の影響を適切に取り扱うことで、散乱振幅の極の情報をスペクトルなどの観測量のみから分類することが望ましいですが、一般的な方法は確立していないようです。また、極自体の定義に曖昧さは無くても、どのような場合に極を「状態」として認定すべきかは必ずしも明確になっていません。これらを整理して理解することが、今後の課題と考えられています。

[1] N. Moiseyev, *Non-Hermitian Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, 2011)
[2] J. R. Taylor, *Scattering Theory* (Wiley, New York, 1972).
[3] R. J. Eden, *et al.*, *The Analytic S-Matrix* (Cambridge University Press, Cambridge, 1966)
[4] Y. Nambu, Nuovo Cim. **6** 1064 (1957).